# Teze disertační práce

# Téma:

# *Modelování hydrodynamické zkoušky*

# Autor: Ing. Jiří Holub

# Školitel: prof. Ing. Pavel Pech, CSc.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem teze disertační práce na téma: Modelování hydrodynamické zkoušky vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací a doporučení školitele. Souhlasím s zveřejněním disertační práce dle zákona č. 111/1988 Sb. O vysokých školách v platném znění, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V ………….. dne ………………………..

Podpis autora

# Abstrakt

Hydrodynamická zkouška patří mezi základní metody stanovení hydraulických charakteristik zvodnělých vrstev. Mezi hlavní vyhodnocované parametry patří transmisivita a storativita vrtu, tyto hlavní dva ukazatele definují základní fyzikální vlastnosti kolektoru, pro jejich stanovení se používají metody odvozené z analytického řešení rovnice pro proudění podzemní vody, které byly odvozené za předpokladů ideálního vrt. Jsou zde však další parametry definující skutečný stav horninového prostředí v průběhu hydrodynamické zkoušky, které nejsou v předpokladech ideální vrtu zahrnuty, v podobě dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu. Tyto dva parametry se do běžně používaných metod pro vyhodnocování hydrodynamických zkoušek nezohledňují. Přestože jejich zanedbání může vést k chybnému vyhodnocení hydrodynamické zkoušky. Z důvodu dále navazujících činností, ale také časové a energetické náročnosti pořízení dat z hydrodynamických zkoušek je žádoucí těmto chybným analýzám předejít. Vynesením dat z čerpací zkoušky do semilogaritmického grafu můžeme pozorovat dvě přímkové části, tento charakteristický tvar křivky signalizuje výskyt vlivu vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů na průběh hydrodynamické zkoušky. První přímkový úsek je z počátku dominantně ovlivněn vlastním objemem vrtu a dodatečnými odpory. Pro delší časový krok je charakteristická přímková část ovlivněná dodatečnými odpory, jejíž směrnice se shoduje s řešení pro ideální vrt. Zde prezentovaná práce si klade za cíl, výše zmíněné charakteristiky reálného vrtu v podobě dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu vyhodnotit z terénních dat získaných na čerpacích zkouškách. K samotnému vyhodnocení parametrů bude autorem sestaven aplikační program, založena na analytickém řešení zahrnující vliv dodatečných odporů a vlastní objem vrtu na průběh snížení během hydrodynamické zkoušky.

# Klíčová slova

Hydrodynamické zkoušky, dodatečné odpory, vlastní objem vrtu

# Obsah

# Úvod

Aktuálně je problematika podzemních vod velmi často řešeným tématem. V souvislosti s diskutovaným globálního oteplování jsou mnohdy zdroje podzemní vody uváděna jako jedna z oblastí, kde může dojít k nežádoucím změnám, z toho důvodu je důležité se touto problematikou zabývat a hledat nová řešení a zpřesňovat ty stávající. Pro Českou republiku jsou zdroje podzemních vod jednou ze základních zdrojů pitné vody. V současnosti můžeme pozorovat na mnoha místech začínající problémy s touto komoditou například vznikající a dlouhodobě trvající úbytek v oblastech s nižší srážkovým úhrnem. Současné technologie zabývající se průzkumem a charakterizováním zvodnělých vrstev, mezi které řadíme hydrodynamické zkoušky, jsou velmi časově a také energeticky náročné procesy. Z těchto důvodů je velmi důležité následné vyhodnocení terénních dat provádět odborně a minimalizovat nežádoucí faktory ovlivňující vlastní průběh čerpacích zkoušek. Mezi faktory ovlivňující průběh snížení na čerpaném vrtu můžeme zařadit parametry charakterizující skutečný vrt, konkrétně dodatečné odpory a vlastní objem vrtu, které však často nejsou do samotného vyhodnocení zahrnuty. Hydrodynamickou zkouška patří mezi základní technologie pro zjištění hydraulických charakteristik zvodnělých vrstev, hlavní hledané parametry jsou storativita a transmisivita zvodně. Tyto parametry mnohdy slouží jako vstupní data pro navazující práce jako například, stanovení optimálního odebíraného množství vody z kolektoru a hrají zásadní roli při modelování pohybu polutantů ve zvodnělé vrstvě. Jednou z možností jak snížit její časové a energetické náklady je částečné řešení za pomocí softwarových aplikací, které tento proces mohou značně zefektivnit a zpřesnit. Za hlavní přínos této práce bych označil vytvoření simulačního programu na vyhodnocení hydrodynamické zkoušky. Dále pak posouzení vhodnosti daného přístupu k modelování hydraulických parametrů z hydrodynamické zkoušky a validace dosažených výsledků s naměřenými terénními daty. V případě potvrzení předpokladů se počítá s dalším rozvojem aplikace a možností jejího praktického využití.

# Cíle práce

1. Vyhodnocení dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu z dat hydrodynamické zkoušky
2. Sestavení aplikačního programu pro vyhodnocení hydrodynamických zkoušek s vlivem dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu na základě analytického popisu snížení hladiny podzemní vody na skutečném vrtu.
3. Stanovení charakteristik skutečného vrtu v podobě dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu z první přímkové části semilogaritmického grafu s(t) (funkce reprezentuje pozorované snížení **s** na vrtu v průběhu čerpání), při znalosti transmisivity a storativity porézního prostředí.

Hlavním kladeným cílem práce je sestavení modelu pro vyhodnocení dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu z dat hydrodynamických zkoušek. Samotný model bude založen na analytickém řešení snížení hladiny podzemní vody s vlivem těchto faktorů. K tomuto účelu bude sestaven aplikační program, umožňující zpracování terénních dat z čerpacích zkoušek, kde je předpokládán výskyt dodatečných odporů a objem vrtu není zanedbán. Následná validace výsledných hodnot faktorů bude předmětem práce. Dalším cílem je upravení softwarového modelu pro vyhodnocení parametrů z počáteční části čerpací zkoušky, kde je dominantní vliv vlastního objemu vrtu na měřené snížení hladiny podzemní vody.

# Literární rešerše

## 1. Základní popis horninového prostředí a jeho fyzikální charakteristiky ve vztahu k podzemním vodám

### Podzemní voda

Vodu nacházející se pod zemským povrhem označujeme jako podpovrchová voda. Předmětem zájmu této práce bude podpovrchová voda, která se vyskytuje v nasycené zóně (zóna saturace) půdních a geologických celků a pro kterou se používá označení podzemní voda (*Valentová*, 2007).

### Klasifikace zvodnělých vrstev

K pohybu podzemních vod dochází díky spojitosti propustných oběhových cest mezi filtrační a vývěrovou oblastí. Čas, za který podzemní voda tuto cestu uplyne, nazýváme doba zdržení. Oblast kde k takovému proudění nedochází, nebo je značně omezeno vůči okolním vrstvám, označujeme jako izolátor. Pokud však geologická formace může částečně vodu propouštět, označujeme ji jako polopropustnou vrstvu (poloizolátor). Označení oblasti za propustnou, nepropustnou nebo polopropustnou je vždy relativní pojmem, protože žádnou horninu nemůžeme označit za zcela absolutně propustnou nebo nepropustnou. Hlavním kritériem zůstává rozdíl v propustnosti sousedících vrstev (*Valentová*, *Jetel*).

Zvodnělé oblasti můžeme rozdělit na kolektory s volnou a napjatou hladinou, v závislosti na tlakových podmínkách na hladině podzemní vody (*Freeze at Cherry*, 1979).

V závislosti na tlakových podmínkách na hladině podzemní vody dělíme zvodnělé vrstvy na tyto kategorie:

1. **Zvodnělé vrstvy s napjatou hladinou**

Za zvodnělý kolektor s napjatou hladinou můžeme označit takový kolektor, který je omezen shora i zdola nepropustným prostředím. V případě průniku horní vrstvou, voda vystoupí nad úroveň svrchní hraniční nepropustné vrstvy. Jestliže ze studny voda samovolně vytéká na zemský povrch, můžeme tuto studnu označit za artézskou.

1. **Zvodnělé vrstvy s volnou hladinou**

Je takový kolektor, který je shora ohraničen hladinou podzemní vody, kde je atmosférický tlak. Kolektor s volnou hladinou může být dotován vodou přímo z oblasti, která je nad kolektorem.

1. **Zvodnělé vrstvy s přetékáním**

Kolektor, který je dotován z horní nebo dolní vrstvy tvořící hranice kolektoru, označujeme jako kolektor s přetékáním. Přestože hraniční vrstvy často označujeme jako izolátory, v tom případě se spíše jedná o polopropustné vrstvy, umožňující částeční průnik vody (*Pech*, 2010).

### Pórovitost

Pórovitost zvodnělého prostředí je dána podílem celkového objemu pórů *Vp*, které se nacházejí ve vymezeném objemu zvodnělého prostředí *Vt.* Při vynásobení stem dostaneme procentuální podíl pórů v celkovém objemu vzorku (*Pech*, 2010).

*n = Vp / Vt* (1.1)

Půdy patří mezi nejvíce porézní materiály v přírodě. Pórovitost závisí hlavně na velikost zrn tvořící horninové prostředí a na tvaru horninových částic (*Heath*, 1983).

### Hydraulická vodivost

Hydraulická vodivost patří mezi základní hydraulické charakteristiky zvodnělých vrstev. Koeficient K vyskytující se v Darcyho rovnici, která popisuje pohyb vody porézním prostředí se nazývá hydraulická vodivost, tento parametr má rozměr rychlosti [L/T].

Mezi veličiny ovlivňující hydraulickou vodivost řadíme hustotu kapaliny a její viskositu. Z charakteristik porézního půdního prostředí mají význam zejména zrnitostní složení a tvar zrn pórů, pórovitost a měrný povrch. Hydraulickou vodivost můžeme vyjádřit ve tvaru:

K = (1.2)

kde k [L2] se nazývá propustnost porézního prostředí a ƞ dynamická viskosita, kterou můžeme vyjádřit jako součin hustoty a kinematické viskosity (Valentová, 2007).

### Propustnost

Na rozdíl od hydraulické vodivosti, propustnost je závislá pouze na charakteristikách porézního prostředí. Určuje schopnost materiálu propouštět vodu bez ohledu na fyzikální vlastnosti kapaliny (*Pech*, 2010). Její hodnotu můžeme určit empirickým vztahem (*Bazer, Schweiger*, 1969).popis

(1.3)

### Transmisivita

Transmisivita označuje schopnost propouštět vodu porézním horninovým prostředím. V případě, že se jedná o homogenní kolektor, definujeme ji jako součin koeficientu hydraulické vodivosti a výšky zvodnělé vrstvy (*Jetel,* 1982).

*T = b K* (1.4)

kde K je hydraulická vodivost [L/T] a b výška zvodnělé vrstvy [L].

### Storativita

Storativita je parametr určující schopnost nasyceného zvodnělého prostředí přijímat nebo uvolňovat určité množství vody. Specifická storativita *Ss* porézního prostředí je hodnota představující schopnost nasyceného porézního prostředí akumulovat určité množství vody a je definována jako objem vody, který se uvolní z jednotkového objemu zvodnělé vrstvy při jednotkové snížení piezometrické výšky.

Specifická storativita Ss[L-1] je definována součtem dvou členů. První člen je určen:

*dVv = α ρ g* (1.5)

kde α stlačitelnost zvodnělé vrstvy, ρ [M/L3] hustota kapaliny a g představuje gravitační zrychlení[L/T2]

a druhý člen:

*dVv = βv n ρ g* (1.6)

kde βv je faktor způsobený stlačitelností kapaliny a n poróvitost.

Po součtu těchto členů můžeme specifickou storativitu vyjádřit vztahem:

*Ss = ρ g (α + nβv) (1.7)*

V případě kolektoru s napjatou hladinou, který je ohraničen nepropustnými vrstvami ke změně množství dojde v důsledku stlačitelnosti porézního prostředí a stlačitelnosti proudící kapaliny (*Valentová*, 2007).

*Ss = dH (1.8)*

kde Ss je specifická storativita [L-1]

Bezrozměrný parametr storativity zvodně S je definován:

*S = Ss b (1.9)*

kde b výška kolektoru, kde bylo dosaženo jednotkového poklesu piezometrické výšky s plochou podstavy 1m2.

### Homogenita a anizotropie půdního prostředí

Jestliže hodnota hydraulické vodivosti K je pro celý kolektor konstantní, můžeme dané prostřední označit za homogenní. V opačném případě se jedná o heterogenní formaci, v případě definice souřadného systému *xyz* lze vyjádřit hodnotu hydraulické vodivosti jako funkci těchto prostorových proměnných *K(x,y,z)*. Výsledné hodnoty funkce pro heterogenní kolektor nejsou konstantní. (*Freeze, Cherry*, 1979). V geologickém prostředí se můžeme setkat s celou řadou druhů heterogenity hydraulické vodivosti, například: heterogenita s náhlou změnou heterogenity, nebo heterogenita s postupnou změnou hydraulické vodivosti.

Pokud hodnota hydraulické vodivosti nezávisí na směru, jedná se o izotropním prostředí. V opačném případě označujeme prostředí za anizotropní, tedy hydraulická vodivost se liší v závislosti na směru. Tento fakt můžeme po zavedení souřadného systému *xyz* vyjádřit vztahem *Kx ≠ Ky ≠ Kz* (*Pech*, 2010).

## **2. Základní fyzikální popis pohybu vody v horninovém prostředí**

### Darcyho zákon

Darcyho zákon objevil francouzský hydraulik Henry Darcy v roce 1856, stanovil závislost mezi proteklým množstvím vody Q[L3/T], které se přímo úměrně zvětšuje s rozdílem hydraulických výšek a nepřímo úměrně s délkou L, kde byli měřeny hodnoty hydraulické výšky. Tento vztah se vyjadřuje pomocí rovnice:

Nasycená hydraulická vodivost *K* je základní charakteristika půdního prostředí, má rozměr rychlosti [L/T]. Hodnoty H1[L] a H2[L] představují hydraulickou výšku na vstupu a výstupu aparatury, vzdálenost mezi nimi je reprezentována hodnotou L. Směr proudu je určen gradientem potenciálu hydraulické výšky (*Freeze, Cherry*, 1979).

Pokud známe průtok Q přes plochu vzorku S, po vydělení těchto hodnot obdržíme hustotu toku *v*. Hustota toku je označována za Darcyho rychlost a má rozměr rychlosti[L/T] (*Valentová*, 2007).

(2.2)

Ve skutečnosti se voda pohybuje jen propustnými póry a nevyplňuje celou plochu vzorku. Pro získání skutečné hodnoty rychlosti je potřeba Darcyho rychlosti upravit. Je-li pórovitost *n* pak skutečná plocha pórů *Sn = nS*. Skutečnou rychlost *v*[L/T] vyjádříme ze vztahu (*Bear, Cheng*, 2010):

Při řešení pohybu podzemní vody zůstává předmětem zájmu nejčastěji Darcyho rychlost (2.2), která jednoznačně udává množství proteklé vody v uvažované oblasti. V praxi se při vyhodnocování proudění vody porézním prostředím nahrazuje skutečný materiál kontinuem, pro které zavádíme makroskopické parametry, jako je hydraulická vodivost.

Darcyho zákon pro hustotu toku lze napsat, jako:

(2.4)

nebo v diferenciální formě:

kde dH/dl je hydraulický gradient. Tato rovnice platí pro jednosměrné proudění v homogenním prostředí.

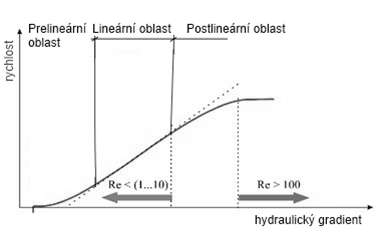
V případě třírozměrného heterogenního anizotropního proudění rychlost *v* rozepisujeme po složkách, kde *xyz* reprezentují osy souřadného systému.

*(2.6)*

kde *K* pro jednotlivé složky tvoří tenzor hydraulické vodivosti (*Freeze, Cherry*, 1979).

### Omezení platnosti Darcyho zákona

Lineární závislost vyjádřena Darcyho zákonem je reprezentována vztahem rychlosti proudění (hustota toku) a hydraulickým gradientem. Lineární závislost má však své omezení, kde již Darcyho zákon neplatí, jak ukazuje obrázek č. 1, tyto hraniční hodnoty, definované hodnotou Reynoldsova čísla označujeme jako meze platnosti Darcyho zákona (*Valentová*, 2007).



*Obr. 1.: Meze platnosti Darcyho zákona, kde Re označuje hodnoty Reynoldsova čísla*

Pro půdní prostředí udává Richardson kritickou hodnotu Reynoldsova čísla přibližně 1 a Lindquist 1 až 4. Pavlovskij zahrnuje do Reynoldsova čísla i vliv pórovitosti a kritické hodnoty uvádí v intervalu od 7 do 9. Rozdílné kritické hodnoty Reynoldsova čísla lze vysvětlit odlišnou metodikou pokusů při experimentech a také tím, že Reynoldsovo číslo není pro půdní prostředí přesně vystihující charakteristikou. Navíc hranici mezi lineárním a postlineárním prouděním je obtížné přesně stanovit, protože přechod z jednoho režimu proudění do druhého je plynulý (*Kazda*, 1997).

Pro velmi hrubozrné materiály, kde převládají setrvačné síly nad viskózními a opak u velmi jemnozrnných zemin dochází k porušení lineární závislosti mezi rychlostí toku a hydraulickým gradientem, kdy určujícím parametrem se stává bezrozměrné Reynoldsovo číslo *Re* *(Valentová,* 2007*)*.

Re = (2.7)

kde *vs* je střední hodnota rychlosti proudění kapaliny [L/T], \nu kinematická viskozita [L2/T] a *d* reprezentuje průměr efektivního zrna [L].

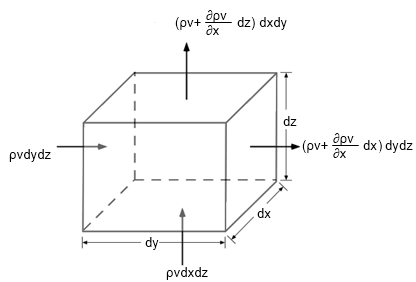
### Ustálené (stacionární) proudění podzemní vody

Proudění, pro které platí, že vektory rychlosti v proudovém poli jsou v čase konstantní, označujeme jako proudění ustálené. Uvažujeme-li jednotkový objem porézního materiálu viz. obrázek č. 2 a tento element označíme za elementární objem. Pak zákon kontinuity při tomto režimu proudění stanovuje, že množství přitékající vody do elementárního objemu se rovná objemu vody, který daný elementární objem opustí. Tento vztah vyjadřuje zápisem:

(2.8)

## kde *v* jsou vektory rychlosti po jednotlivých složkách a *ρ* je hustota kapaliny. Pokud označíme danou kapalinu za nestlačitelnou, pak platí, že funkce *ρ(x,y,z)* je konstantní. Výše uvedenou rovnici lze zjednodušit do tvaru:

(2.9)



*Obr.: 2. Elementární objem.*

Substitucí Darcyho zákona pro *vx, vy a vz* získáme rovnice popisující ustálené anizotropní proudění porézním materiálem.

(2.10)

kde *h* hydraulická výška a Kx, Ky a Kz představují hydraulickou vodivost v jednotlivých směrech souřadného systému. Pro izotropní medium můžeme definovat Kx, Ky, Kz jako konstantní hodnoty a homogenní prostředí charakterizovat funkci K(x,y,z), která taktéž nabývá konstantních hodnot. Pro izotropní homogenní prostředí tedy platí vztah:

(2.11)

Tato rovnice je jedna ze základních parciálních diferenciálních rovnic, označovaná jako Laplaceova rovnice. Řešením rovnice (2.11) získáme funkci h(x,y,z), která popisuje hodnoty hydraulické výšky v jednotlivých bodech trojrozměrné oblasti řešení. Stává se tak základní rovnicí pro popis proudění podzemní vody v porézních materiálech v ustáleném režimu proudění (*Freeze, Cherry*, 1979).

### Dupuitovy postuláty

Při ustáleném proudění podzemní vody s volnou hladinou, často zavádíme zjednodušující Dupuitovy postuláty. Postuláty jsou založeny na předpokladu, že sklon hladiny podzemní vody je malý v rozsahu 1/100 až 10/1000, z toho důvodu lze směr proudění aproximovat na horizontální (*Valentová*, 2007). Dupuitovy postuláty lze definovat tímto způsobem:

1. hydraulická výška H(x,y,z) je rovna výšce podzemní vody h(x,y), proudnice jsou vodorovné přímky a ekvipotenciály svislice
2. gradient potenciálu je dán sklonem volné hladiny a je po svislici konstantní.

Po zavedení těchto postulátů můžeme vyjádřit hustotu toku [L/T] jako:

(2.12)

## Dupuitovy postuláty se často používají při řešení proudění podzemní vody, daný problém nám značně zjednodušení, přesto výsledky lze při splnění základních předpokladů považovat za zcela relevantní *(Freeze, Cherry,* 1979*).*

### Neustálené proudění podzemní vody

Při neustáleném proudění elementárním objemem reprezentovaným porézním materiálem platí že, celková rychlost proudící kapaliny v elementárním objemu se rovná časové změně objemu kapaliny uvnitř elementu. Pomocí rovnice kontinuity můžete tuto skutečnost vyjádřit vztahem:

(2.13)

kde *n* je pórovitost materiálu. Víme, že změna hustoty ρ a změna pórovitosti *n* jsou způsobeny změnou hodnoty hydraulické výšky a specifická storativita je definováno jako množství uvolněné vody při jednotkovém poklesu hydraulické výšky, tedy časovou změnu objemu lze vyjádřit jako:

(2.14)

Zavedením předpokladu, že ρ je mnohonásobně větší než můžeme hustotu ρ zanedbat na obou stranách rovnice a po dosazení Darcyho zákona získáme vztah pro popis neustáleného anizotropního proudění nasyceným porézním materiálem:

(2.15)

Pro homogenní materiál a izotropní proudění rovnici redukujeme rovnici (2.15) na tvar:

(2.16)

Rovnice (2.16) je označovaná jako difúzní rovnice, jejíž řešení je funkce *h(x,y,z,t)*, která popisuje časové rozložení hydraulické výšky v zájmové oblasti. Zdárné vyřešení rovnice vyžaduje znalost těchto hydrogeologických parametrů: hodnotu specifické storativity zvodně a hodnotu hydraulické vodivosti. Pro speciální případ horizontálního kolektoru s napjatou hladinou o mocnosti *b*, lze rovnici upravit do tvaru:

(2.17)

kde bezrozměrný koeficient storativity *S = Ss/b* a transmisivita kolektoru *T = Kb* (Freeze, Cherry, 1979).

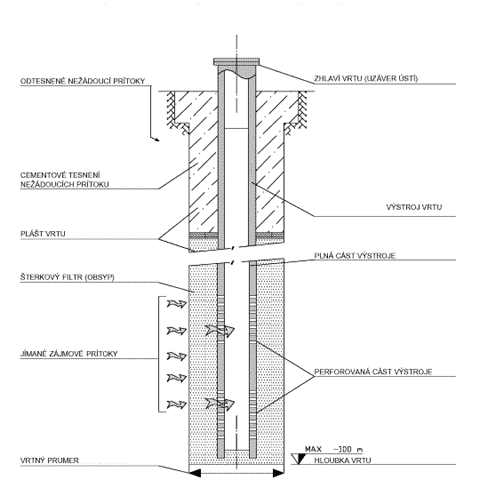
## 3. Proudění podzemní vody k vrtu

### Hydrodynamické zkoušky

Za hydrodynamické zkoušky označujeme procesy, kterými na hydrogeologických objektech (vrt, studna) na základě pozorování účinku hydrogeologického zásahu do systému stanovujeme hydraulické charakteristiky pozorované oblasti. Hydrodynamické zkoušky můžeme rozdělit do několika základních skupin:

1. Přítoková zkouška, při již se pozoruje reakce objektu na dotaci pozemní vody. Do této skupiny řadíme čerpací zkoušku, při které je měřeno snížení hladiny podzemní vody v čerpaném objektu při konstantním čerpaném množství. Následně můžou být stanoveny hodnoty pro stoupací zkoušku, v podobě záznamu vzestupu hladiny podzemní vody. Zde jsou uvedeny pouze základní typy přítokových zkoušek.
2. Nálevové zkoušky, kde stanovujeme závislost mezi stavem hladiny ve zkušebním objektu a množstvím vody nalévaným do objektu.
3. Vtlačovací zkoušky, při nichž se sleduje závislost tlakových poměrů na vrtu s množstvím tekutiny vtlačované do vrtu přetlakem.
4. Expresní zkoušky, jedná se o zkoušky o velmi krátké době trvání, kdy se do objektu jednorázově přidá nebo odebere určitý objem kapaliny.

Základním výstupem těchto terénním zkoušek je časový průběh změny hladiny podzemní vody v hydrogeologických objektech. Následně jsou data použita jako vstupní data pro vyhodnocovací metody, pomocí které dojde k výslednému určení základních charakteristik zvodnělých vrstev (*Jetel*, 1982).



*Obr.: 3. Schéma standardního vrtu pro jímání podzemí vody*

### Neustálené rotačně symetrické proudění

Rotačně symetrické proudění při použití cylindrických souřadnic je takové proudění, které je ve všech rovinách, procházející osou vrtu stejné a jehož vektor rychlosti v libovolném bodě *x* a čase *t* leží v rovině dané osou vrtu a bodem *x*. Protože hydraulická výška a její gradient je po zavedení Dupuitových postulátů konstantní na vertikále, a protože je proudění symetrické, bude v rovnici popisující proudění podzemních vod vystupovat pouze jedna nezávisle proměnná *r* – proudění se poté stává jednorozměrným. Pro popis toho proudění používáme cylindrických souřadnic, které jsou definovány souřadnicí *r* vzdálenost od osy symetrie, souřadnicí *z* určující vertikální osu a úhlem průmětu průvodiče *θ*. Diferenciální rovnice popisující radiálně symetrické proudění ve zvodnělé vrstvě ve tvaru pro snížení hladiny má tvar (*Valentová*, 2007).

(3.1)

kde je S  storativita vrtu a T transmisivita zvodnělého prostředí.

Tento tvar rovnice nejčastěji používáme při řešení proudění podzemních vod, kde jako hlavní kritérium výpočtu vystupuje snížení hladiny v průběhu hydrodynamické zkoušky (*Wang et al, 2012*). Při čerpání vody z vrtu dochází k uvolňování vody z pórů a v důsledku toho dochází ke snižování hladiny, tvoří se depresní kužel. U kolektorů s napjatou hladinou vlivem stlačitelnosti prostředí a vody nedochází k poklesu hladiny podzemní vody, nýbrž k poklesu piezometrické výšky, která má taktéž tvar depresního kužele (*Domenico et al.,* 1998).

Při čerpání ze studny považujeme proudění za nestacionární, za předpokladu nekonečného dosahu kolektoru a stále se zvětšujícího dosahu depresního kužele. Poměr dosahu studny *R*[L] definuje vzdálenost vlivu depresního kužele na tvar hladiny podzemní vody (*Pech*, 2010). Pro jeho určení je možné použít empirický vzorec dle Sichardta:

R = 3000 \* s \* K ½ (3.2)

kde s je snížení hladiny ve studni [L] a K hydraulická vodivost [L/T].

### Neustálené proudění k ideálnímu vrtu

Theis (1935) byl první kdo publikoval analytické řešení rovnice pro neustálené proudění podzemní vody (3.1). Tento přínos do problematiky proudění podzemní vody znamenal značný pokrok pro daný obor. Při jeho řešení byly uvažovány tyto počáteční a okrajové podmínky:

h(r, 0) = h0 pro r > 0

okrajové podmínky:

h(∞,t) =h0 pro t > 0

a konstantní čerpané množství Q[L3/T] ve studni: pro t > 0

Výsledné řešení můžeme vyjádřit ve tvaru:

(3.3)

kde

Integrál v rovnici (3.3) označujeme jako exponenciální integrál, pro speciální definici hodnoty *u*, kterou můžeme označit jako argument studňové funkce, dostaneme rovnici snížení podzemní vody ve tvaru:

(3.4)

kde funkci *W(u)* reprezentuje studňová funkce, která odpovídá integrální exponenciální funkci a lze ji vyjádřit ve tvaru:

(3.5)

*pro n = 1,2,3…*

Pro hodnoty 1/u > 100 lze Theisovu studňovou funkci ve tvaru (3.4) zjednodušit pomocí Jacob (1946) aproximace zanedbáním třetího a vyššího členu *n* ve funkci (3.5). Předpis studňové funkci můžeme poté vyjádřit jako:

W(u) ≈ -0.577216 – ln(u) (3.6)

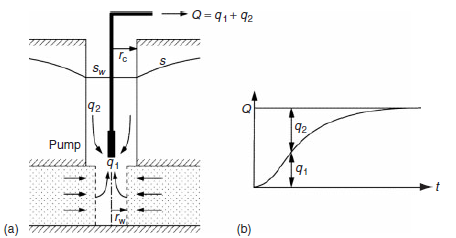
Dosazením za argument Theisovy studňové funkce *u*, lze po úpravě vyjádřit výsledný aproximativní tvar Theisovy studňové funkce jako:

(3.7)

## 4. Proudění podzemní vody v kontextu skutečného vrtu

### Vlastní objem vrtu

## Pokud poloměr čerpacího vrtu není zanedbatelný, poté na samotném začátku čerpací zkoušky odebírané množství vody pochází z vlastního objemu vrtu a nikoliv z okolního porézního prostředí (*Papadopulos and Cooper*, 1967), na úplném počátku hydrodynamické zkoušky můžeme množství čerpané z vlastního objemu vrtu označit za dominantní, jak ukazuje obrázek č. 4a. Vliv vlastního objemu vrtu na průběh čerpací zkoušky trvá jen několik minut a časem se snižuje viz. obrázek č. 4b (*Fenske*, 1977), přesto jeho zanedbáním dojde k nadhodnocení hodnoty statorativity vrtu, přestože vlastní objem vrtu ovlivňuje hodnoty snížení jen na počátku čerpací zkoušky (*Black and Kipp*, 1977).



*Obr.: 4. A) Ukazuje vliv dodatečných odporů a průběh čerpací zkoušky, q2 představuje množství vody odebrané z vlastního objemu vrtu a q1 reprezentuje objem vody z kolektoru. B) Časový průběh jednotlivých složek čerpaného množství Q*

Model popisující vliv objemu vrtu a průběh snížení hladiny podzemní vody byl popsán Papadopulos and Cooper (1967). Řešení bylo založeno na popisu neustáleného proudění podzemní vody dle Thies modelu, s tím rozdílem, že zde byl uvažován konečný rozměr poloměru vrtu (v Thiesově řešení je vrt považován za ideální, tedy poloměr vrtu je nulový). Dobu trvání *ts* vlivu vlastního objemu vrtu na průběh hydrodynamické zkoušky lze definovat pro čerpací vrt (*Papadopulos and Cooper*, 1967):

ts = 250 (rc2 – rp2) / T (4.1)

a pro pozorovací vrt:

ts = 2500 (rc2 – rp2) / T (4.2)

kde rc je well casing radius a rp je pump pipe radius. (ujednotit značení)

Vlastní objem vrtu je často definován pomocí jednotkového faktoru storativity vrtu C[L2], který lze definovat ve zjednodušeném tvaru jako (*Ramey*, 1970):

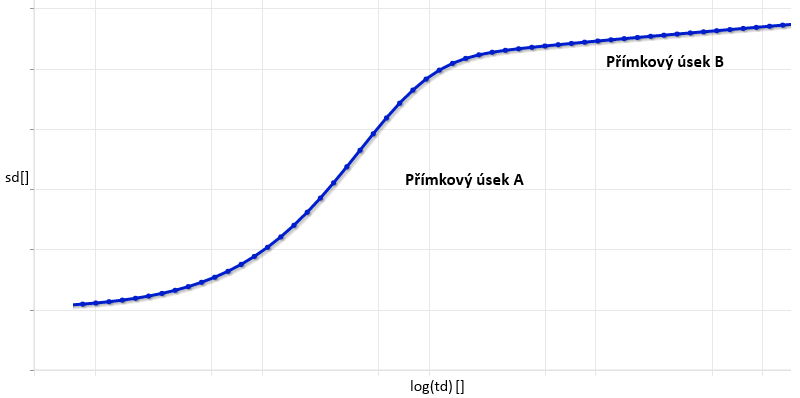
(4.3)

## kde ΔV je objemová změna [L3] a Δh je změna výšky hladiny ve vrtu.

Při řešení proudění podzemních vod s vlivem vlastního objemu vrtu je často zaváděn bezrozměrný parametr vlastního objemu vrtu ve tvaru:

(4.4)

Pro data z hydrodynamických zkoušek s vlivem vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů jsou charakteristické dvě přímkové části. Průběh první přímkové části semilogaritmického grafu označené jako *A*(obrázek č. 5) čerpací zkoušky určují hodnoty vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů (Garcia-Rivera and Raghavan, 1979; Tiab, 1995). Validní vyhodnocení zkoušky pomocí metod založených na Thies modelu se provádí na druhé přímkové části *B*(obrázek č. 5) semilogaritmického grafu snížení hladiny podzemní vody, která již není zatížena vlivem čerpání vlastního objemu vrtu (Agarwal et al. 1970, Remay 1976). Pro první přímkový úsek *A* je charakteristický vyšší sklon než v případě druhého přímkového úseku *B* na semilogaritmickém grafu s(t), jak ukazuje obrázek č. 5. Charakteristickým rysem první přímkové časti A funkce s(t) je jednotkový sklon (45°) po vynesení do logaritmického grafu. Během této fáze hydrodynamické zkoušky je množství čerpané vod z vlastního objemu vrtu dominantní (citace).



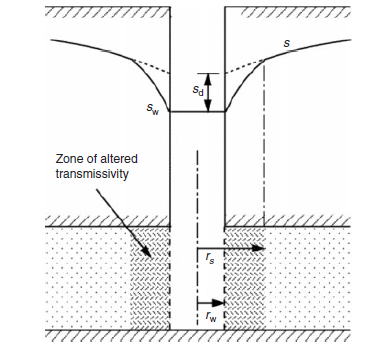
*Obr.: 5. Tvar křivky reprezentující průběh snížení na vrtu s vlivem vlastního objemu vrtu. První přímková část A definuje úsek s vlivem vlastního objemu vrtu.*

### Dodatečné odpory

Koncept dodatečných odporů poprvé představil Everdingen (1953) v petrolejářské literatuře, později pak Agarwal et al. (1970) stanovil analytické řešení proudění podzemní vody k vrtu s dodatečnými odpory a vlastním objemem vrtu. Hodnoty snížení na čerpaném objektu můžou být značně ovlivněny dodatečnými odpory. Jejich vliv na výsledná pozorované snížení hladiny podzemních vody způsobuje oblast v těsném okolí vrtu a na stěně vrtu. Oblast výskytu zpravidla nepřesahuje vzdálenost 6m od osy vrtu (*Van Everdingen*, 1953). Oblast je typická pozměněnou charakterizací porézního materiálu ve smyslu hydraulických vlastností, v důsledku čehož dochází ke změně měřených hodnot snížení hladiny podzemní vody na pozorovaném objektu vůči snížení, které vychází z teoretického Theis modelu pro ideální vrt (Obr. č. 6). Tento vztah můžeme vyjádřit jako:

Sv = ste + sw (opravit dle obrázku) (4.5)

kde sv je pozorované snížení na vrtu vlivem čerpání, sw je snížení způsobené dodatečnými odpory a ste je snižení vycházející z Theis modelu.



*Obr.: 6. Snížení na vrtu ovlivněné dodatečnými odpory*

Vliv dodatečných odporů na celkové snížení lze kvantifikovat, za předpokladu ustáleného proudění a zavedení rotačně symetrického proudění jako:

(4.6)

kde W [] je bezrozměrný koeficient dodatečných odporů a Q[L3/T] je množství čerpané vody.

koeficient dodatečných odporů lze vyjádřit:

(4.7)

kde Ts je hodnota transmisivity v oblasti s působením dodatečných odporů a T je hodnota transmisivity porézního materiálu bez vlivu dodatečných odporů. Z předpisu vyplývá, že v případě pokud Ts je větší, než hodnota transmisivity kolektoru, pak hodnota koeficientu dodatečných odporů je záporná a naopak. Tedy dodatečné odpory mohou pozorované snížení hladiny ovlivňovat ve smyslu jejího nadhodnocení, ale také podhodnocení oproti teoretickému snížení v závislosti na změně hydraulické vodivosti zasažené oblasti.

Dodatečné odpory jsou způsobeny řadou jevů, které vznikají během samotného zhotovení vrtu, ale také v průběhu čerpaní podzemní vody z vrtu. Při vrtání horninovým prostředím dochází ke kolmataci okolí vrtu, což sebou přináší změnu hydraulických vlastností porézního prostředí a následný vliv na dataci podzemní vody do vrtu. Mezi další dodatečné odpory může zařadit zmenšení aktivní plochy vrtu, turbulentní režim proudění v blízkosti vrtu, hloubka vrtu neodpovídá mocnosti kolektoru a další. Jednotlivé složky dodatečných odporů lze rozdělit na (*Jetel*, 1982):

1. Kolmatace vrtu – ucpání pórů jemným materiálem, čímž dochází ke snížení průtočnosti porézního prostředí nebo v důsledku narušení struktury materiálu při hloubení nebo následném vystrojování objektu.
2. Zmenšení aktivního průřezu stěny – omezení průtočnosti vlivem instalace filtru, perforované pažnice apod.
3. Neúplný průnik – vrt neprochází celou mocností kolektoru.
4. Ucpání filtru – zachycování částic hornin nebo obsypu v otvorech filtru. Chemická inkrustace a ucpání otvorů filtru působením mikroorganismů a bakterií.
5. Tření proudící kapaliny o stěny vrtu a jejím vnitřním třením.
6. Turbulentní režim proudění ve zvodnělé vrstvě, zejména pak v blízkosti odběrového vrtu.
7. Ostatní druhy dodatečných odporů

Díky velkému množství faktorů, které definují výslednou hodnotu dodatečných odporů, je obtížné jejich přesné dílčí určení, z toho důvodu se často zavádí sumární vyjádření dodatečných odporů sw, které reprezentuje část snížení přímo ovlivněnou výskytem dodatečných odporů.

Při vyhodnocování hydrodynamický zkoušek pomocí Jacobovy aproximace bylo prokázáno, že výskyt dodatečných odporů nemá na vyhodnocené hodnoty transmisivity T a sotrativity S vliv. V počáteční fázi se Agarwal et al. (1970) řešení shoduje s řešením Papadopulos and Cooper (1967), kde bylo uvažováno pouze s vlastním objemem vrtu a prokazuje počáteční dominantní vliv tohoto faktoru. Pro delší časový krok se průběh funkce Agarwal et al. (1970) paralelně shoduje s přímkovou částí funkce Jacobova aproximativního řešení. Dodatečné odpory tedy ovlivňují délku a tvar počátečního úseku, nikoliv pak směrnici přímkové části grafu.

### Rovnice popisující proudění ke skutečnému vrtu

Parametry vlastní objem vrtu a dodatečné odpory mohou ovlivňovat průběh samotné čerpací zkoušky. Kombinace těchto efektů může také ovlivnit pozorované snížení na pozorovacím vrtu, které vzniká jako odezva na snížení hladiny podzemní vody v oblasti (Agarwal et al. 1970), zanedbáním těchto faktorů může dojít k chybnému vyhodnocení základních hydraulických charakteristik v podobě transmisity a storativity vrtu pomocí standardně používaných metod (Agarwal et al. 1970; Jargon 1976).

Bezrozměrné snížení hladiny hwd podzemní vody v homogenním a izotropním kolektoru s najatou hladinou, vlastním objemem vrtu a dodatečnými odpory vyjádříme jako (Agarwal et al. 1970):

(4.8)

(4.9)

kde *td = Tt/(rw2 S)* je bezrozměrný čas, *p = i (ln2 / td )* je Laplaceův transformační parametr kde *i* je aktuální hodnota Stehfestova parametru (odkaz na Stehfesta), K0 and K1 jsou modifikované Besselovy funkce druhého druhu a nultého respektive prvního řádu, Swd bezrozměrný parametr dodatečných odporů a Cpd bezrozměrnýparametr vlastního objemu vrtu. Označení L-1 zastupuje Laplasovu inverzní tranformaci, kterou v tomto případě představuje Stehfestův algoritmus (Stehfest, 1970). Stehfestův algoritmus lze aplikovat na matematický model čerpací zkoušky, který je založený na Laplaceově transformační funkci popisující proudění podzemní vody a lze jej využit pro hodnoty bezrozměrného času td > 0 (Moench and Ogata, 1984).

### Stehfest algoritmus

Stehfestův algoritmus je inverzní algoritmus pro řešení inverzní Laplaceovy transformace. Tento algoritmus je velmi rychlý a zvláště vhodný pro funkce vykazující hladký průběh (*Stehfest H.,* 1970). Stehfestův algoritmus je definován pro t > 0 a pro nalezení obrazu F(p) lze použít tento aproximativní vzorec:

*(4.10)*

*kde*

kde t je čas, i(ln/2)/t je nahrazený parametr Laplace transformace p a N Stehfest podmínka nabývající hodnot 6, 8, 10...

# Metodika

1. Měření terénních dat.
2. Vyhodnocení základní terénní zkoušky, stanovení transmisivita a storativita zvodně.
3. Sestavení modelu pro vyhodnocení dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu, na základě analytického předpisu pro snížení hladiny podzemní vody s vlivem právě těchto faktorů.
4. Stanovení parametrů skutečného vrtu na základě znalosti počáteční fáze čerpací zkoušky.
5. Validace hodnot z modelu pomocí metod pro determinaci parametrů skutečného vrtu.

### Terénní měření

Hydrodynamická zkouška patří mezi nejběžnější metody průzkumu hydrogeologických vrstev. Výsledkem zkoušek je odezva zvodně na množství čerpané vody z kolektoru, pro správný průběh je nezbytné dodržení konstantního čerpaného množství po celou dobu průběhu zkoušky, jde o základní předpoklad ustáleného modelu proudění k vrtu založenému na Theis modelu. Tato skutečnost je však při samotném zhotovování zkoušky často problematická. Avšak pro vyhodnocení parametrů skutečného vrtu v podobě vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů nezbytná.

### Specifikace terénních dat

Specifikace datové základny spočívá v naměřených snížení hladiny podzemní vody v průběhu čerpání vody z vrtu. Tento technologický proces je popsán metodikou pro čerpací zkoušky na hydrogeologických objektech. Pro zde prezentovanou metodu vyhodnocení je nutné stanovit snížení hladiny podzemní vody na samotném počátku čerpací zkoušky, kdy dominuje dotace z vlastního objemu vrtu a nikoliv z porézního materiálu, kterým je tvořen kolektor samotný. Vhodnost terénních dat je dále limitována volbou délka časového kroku, kdy při dostatečně krátkém časovém kroku na samotném počátku zkoušky je dosaženo nezbytného popsání počáteční fáze čerpací zkoušky. Toto skutečnost často znemožňuje použití dat pro zde prezentovanou metodu vyhodnocení parametrů skutečného vrtu, z důvodu nevhodně zvoleného časového kroku měření snížení hladiny, kdy je počáteční fáze zkoušky zcela zanedbána. Před samotným vyhodnocením parametrů transmisivity a storativity z dat čerpací zkoušky předchází kontrola, zda v průběhu čerpání nedošlo k ovlivnění výsledků snížení hladiny vlivem dotace vody přes hranice kolektoru, způsobenou například polopropustnou hranicí kolektoru, v případě potvrzení této skutečnosti jsou data znehodnocena a nemohou být dále vyhodnocena pomocí zde prezentované metody. Toto ověření můžeme provést porovnáním průběhu funkce snížení s hladiny podzemní vody v průběhu čerpaní zkoušky s funkcí vycházející z Thies modelu.

### Vyhodnocení základních hydraulických parametrů

Základní charakterizací zvodnělého prostředí je tramsmisivita a storativita zvodně. Tyto hydraulické charakterizace slouží jako vstupní parametry pro popis rotačního proudění s vlivem vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů, které publikovat Agarwal, 1970. Pro vyhodnocení těchto základních charakteristik byla zvolena Jacobova metoda semilogaritmického grafu. Po vynesení hodnot snížení hladiny podzemní vody do semilogaritmického grafu může být patrný výskyt dvou přímkových částí grafu, tento tvar křivky signalizuje ovlivnění čerpací zkoušky vlastním objemem vrtu a dodatečnými odpory. Druhá přímková část je směrnice grafu sloužící k určení hodnot transmisivity pomocí Jacob metody. K stanovení hodnoty storativity zvodně je nezbytné provést měření vlivu snížení hladiny podzemní vody na pozorovacím vrtu.

### Sestavení modelu

Na základě analytického řešení proudění podzemní vody k vrtu s vlivem dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu bude sestaven aplikační program. Vstupními daty do model pro vyhodnocení parametrů skutečného vrtu jsou průběh snížení hladiny podzemní vody na čerpacím vrtu a hydraulické parametry zvodně vyhodnocené pomocí Jacobovy metody.

V rovnici pro bezrozměrné snížení hladiny podzemní vody s výskytem dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu se vystupují čtyři neznámé parametry: transmisivita, storativita, faktor vlastního objemu vrtu a bezrozměrná hodnota dodatečných odporů. Odhad těchto čtyř parametrů z rovnice pro snížení hladiny podzemní vody pomocí iterační procedury, při které se jednotlivé parametry nastavují tak, abychom dosáhli co nejlepší shody, není zdaleka jednoduché aplikovat. Tento proces může být časově velmi náročný. Odhad transmisivity vrtu je možné z dat čerpací zkoušky, vyhodnocení lze provést na druhém přímkovém úseku funkce h(t), za pomocí metody Jacobovy metody, pro odhad hodnoty storativity vrtu S je nutné změřit průběh snížení v pozorovacím vrtu, které vzniká jako odezva na čerpání během samotné čerpací zkoušky. Na základě znalosti parametrů transmisivity a storativity zvodně můžeme stanovit ostatní parametry.

* Vstupní parametr transmisivita a storativita zvodne
* Nalezení odpovídajících hodnot dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu, kde je dosaženo největší shody s modelovým průběhem snížení. Pro posouzení bylo použito statistických kritérií.

### Validace modelu

Výsledné hodnoty z modelu budou dále validovány pomocí metody pro vyhodnocení vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů, které prezentoval XY.

# Očekávané výsledky

1. Sestavení aplikačního programu na vyhodnocení charakteristik skutečného vrtu v podobě dodatečných odporů a vlastního objemu vrtu.
2. Vyhodnocení těchto parametrů z počátečního úseku hydrodynamické zkoušky

Základním výsledkem práce je model pro vyhodnocení parametrů skutečného vrtu. Dodatečné odpory a vlastní objem vrtu jsou faktory, které ovlivňují průběh hydrodynamické zkoušky a způsobují rozdíl ve skutečné měřených hodnotách snížení hladiny oproti teoretickému snížené, které je založeno na Theis modelu snížení hladiny podzemní vody. Zanedbání vlivu těchto faktorů může způsobit chybnou intepretaci dat z hydrodynamické zkoušky a zapříčinit znehodnocení provedené terénní zkoušky. Zde prezentovaná metody vyhodnocení s vlivem těchto faktorů počítá a vystihuje skutečný stav průběhu zkoušky v podobě vlastního objemu vrtu a dodatečných odporů, které jsou nedílnou součástí hydrodynamické zkoušky.

# Přínosy

* Zpřesnění vyhodnocení hydrodynamické zkoušky
* Popsání skutečného stavu během hydrodynamické zkoušky s vyhodnocením parametrů, které jsou při běžné zkoušce zanedbány
* Znalost dodatečných odporů hrají důležitou roli při určení skutečného stavu vrtu, ve smyslu stanovení potřebnosti regenerace vrtu.
* Jetel str. 57 k cemu je nutne vyhodndit odpory

# Seznam literatury

1. *Agarwal, R. G., R. Al-Hussainy, and H. J. Ramey Jr.*, 1970: An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. Analytical treatment. Trans. Soc. Pet. Eng. AIME, 249, 279-290.
2. *Bear, Jacob, Cheng, Alexander H.-D.*, 2010, Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport, Springer Netherlands, ISBN 978-1-4020-6681-8
3. *Black, J. H. and K. L. Kipp*, 1977: Observation well response time and its effect upon aquifer test results. J. Hydrol., 34, 297-306, doi: 10.1016/0022-1694(77)90137-8.
4. *Cooper, H. H., Jr. and C. E. Jacob*, 1946: Generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well-field history. Trans. AGU, 27, 526-534.
5. *Domenici P. A., Schwartz F. W*., 1998. Physical and chemical hydrogeology. Wiley: 60-63, ISBN-10: 0471597627
6. *Fenske, P. R.*, 1977: Radial flow with discharging-well and observation-wellstorage. J. Hydrol., 32, 87-96, doi: 10.1016/0022-1694(77)90120-2.
7. *Freeze A, Cherry J.*, 1979, Groundwater, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
8. *Heath C. Ralph*, 1983. Basic Ground-Water hydrology. Geologigal survey Dallas.
9. *Jargon, J. R.*, 1976: Effect of wellbore storage and wellbore damage at the active well on interference test analysis. J. Pet. Tech., 28, 851-858, doi: 10.2118/5795-PA.
10. *Jetel J*., 1982:
11. *Kazda I*., 1997: Podzemní hydraulika v ekologických a inženýrských aplikacích. Academia, Praha.
12. *Moench, A. and Ogata, A.*, 1984: Analysis of Constant Discharge Wells by Numerical Inversion of Laplace Transform Solutions, in Groundwater Hydraulics (eds J. S. Rosenshein and G. D. Bennett), American Geophysical Union, Washington, D. C.. doi: 10.1029/WM009p0146
13. *Papadopulos, I. S. and H. H. Cooper*, 1967: Drawdown in a wellof large diameter well. Water Resour. Res., 3, 241-244, doi: 10.1029/WR003i001p00241.
14. *Pech, P*. 2010. Speciální případy hydrauliky podzemních vod. Česká zemědělská univerzita v Praze ve Výzkumném ústavu vodohospodářském T. G. Masaryka v.v.i., 49, ISBN-978-80-87402-04-7
15. *Ramey, H. J. Jr*.: 1970, Short-time well test data interpretation in the presence of skin effect and wellbore storage , J. Pet. Tech., Jan., 97
16. *Ramey, H. J. Jr*.: 1976, Practical Use of Modern Well Test Analysis, paper SPE, 5878 preseted at the SPE-AIME 46th Annual California Regional Meeting, Long Beach, CA, April 8-9,
17. *Stehfest, H.*, 1970. Algorithm 368 numerical inversion of Laplace transforms D-5. Comm. of the ACM No 1.
18. *Streltsova, T. D*., 1988: Well Testing in Heterogeneous Formations, Wiley, New York, 413 pp.
19. *Taib D.,* 1995. Analysis of pressure und pressure derivative without type-curve matching – Skin and wellbore storage. Journal of Petroleum Science and Enginneering.: 170-181.
20. *Theis, C. V.,* 1935: The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using Ground-Water Storage. Trans. AGU, 16, 519-524.
21. *Valentová J.,* 2007: Hydraulika podzemní vody. *ČVUT, Praha.*
22. *van Everdingen, A.F., Hurst, W.,* 1953. The skin effect and its influence on the productive capacity of the well. Transactions of the American Institute Mineralogical Metallurgical and Petrological Engineering. 198, 171–176.
23. *Wang C. T., Yeh H., Tsai C*., 2012. Transient drawdown solution for a constant pumping test in finite two-zone confined aquifers. *Hydrology and Earth System Sciences*